Povezava med zveznimi in diskretnimi signali

Drago Matko Univerza v Ljubljani, Fakulteta za elektrotehniko

Signali v praksi so običajno zvezni in neperiodični, za obravnavo na digitalnih računalnikih pa je uporabna predvsem Diskretna Fourierova transformacijo, ki predpostavlja časovno diskretne in periodične signale. Zato bomo v tem podpoglavju obravnavali povezavo med obema vrstama signalov, med njunima spektroma in spektralnima močnostnima gostotama. Obravnavali bomo tudi vzorčene signale, ki pomenijo vmesno stopnjo med obema vrstama signalov.

Časovno zvezne signale bomo označevali z majhno črko ($x(t)$), njihov Fourierov transform z veliko črko ($X(\omega)$), vzorčene signale bomo označevali z zvezdico ($x^*(t)$ za časovni signal, $X^*(\omega)$ za njegov Fourierov transform), periodične signale z p ($x^p(t)$ za časovni signal, $X^p(m\frac{2\pi}{T})$ za njegov Fourierov transform, to je koeficient Fourierove vrste) časovno diskretne in periodične signale pa bomo označevali z oznako d ($x^d(k)$ za časovni signal, $X^d(m)$ za njegov Diskretni Fourierov transform). Čas vzorčenja pri vzorčenih signalih bomo označili z λ, periodo pri časovno periodičnih signalih pa s T.

1 Časovni signali

Najprej si oglejmo povezavo med časovnimi signali. Ne da bi izgubili na splošnosti, lahko predpostavimo, da je originalni časovno zvezni in neperiodični signal različen od 0 le na intervalu med 0 in T, izven tega območja pa je enak 0. V praksi je to običajno območje v katerem smo merili signal in je vedno končne dolžine. Prav tako bomo predpostavili, da je vrednost signala $x(t)$ pri zgornji meji enaka 0, torej

$$x(t) = 0 \qquad \text{za} \qquad t < 0 \qquad \text{in} \qquad t \geq T \tag{1}$$

Vzorčeni signal dobimo tako, da pomnožimo originalni signal $x(t)$ z vlakom delta impulzov

$$x^*(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\lambda) \tag{2}$$

Ker je vrednost signala $x(t)$ različna od 0 le v območju med 0 in T, lahko meji v vsoti zgornjega izraza zamenjamo z 0 oz. $N-1$, kjer je

$$T = N\lambda \tag{3}$$

Tako dobimo

$$x^*(t) = x(t) \sum_{k=0}^{N-1} \delta(t - k\lambda) \tag{4}$$

Edine vrednosti signala $x(t)$, ki vplivajo na rezultat so tiste, katerih argument je $t = k\lambda$, zato lahko zgornjo enačbo zapišemo tudi v naslednji alternativni obliki

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k\lambda)\delta(t - k\lambda) \tag{5}$$

Amplituda vzorčenega signala je neskončna, informacija o originalnem signalu $x(t)$ je vsebovana v ploščini ustreznega delta impulza.

Pri obdelavi na digitalnih računalnikih moramo uporabljati vzorčene signale in sicer tako časovne, kakor tudi frekvenčne. Vzorčenost v enem prostoru pa ima za posledico periodičnost v drugem, zato pravzaprav potrebujemo periodične signale. Predpostavili bomo, da dobimo periodični signal iz originalnega signala tako, da le tega enostavno prestavimo za $\pm T, \pm 2T, \ldots$

$$x^p(t \pm iT) = x(t) \qquad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Digitalni signal $x^d(k)$, ki pripada originalnemu signalu $x(t)$ je definiran le za celoštevilčne vrednosti argumenta in sicer je vrednost digitalnega signala pri argumentu k enaka amplitudi originalnega signala $x(t)$ za $t = k\lambda$, kjer je λ čas vzorčenja. Uporabljali bomo le periodične digitalne signale, zato lahko zapišemo

$$\begin{aligned} x^d(k) &= x^p(k\lambda) \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \\ x^d(k \pm iN) &= x^d(k) \quad i = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Ker pa smo predpostavili, da dobimo periodični signal iz neperiodičnega z njegovo mnogokratno preslikavo,lahko glede na en. (6) zapišemo

$$\begin{aligned} x^d(k) &= x(k\lambda) \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \\ x^d(k \pm iN) &= x^d(k) \quad i = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

1.1 Frekvenčni signali

Oglejmo si sedaj povezamo med Fourierovimi transformacijami signalov. Fourierova transformacija originalnega signala je

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\jmath\omega t}dt = \int_0^T x(t)e^{-\jmath\omega t}dt \tag{7}$$

Frekvenčni spekter takšnega signala je zvezen in neperiodičen. Če predpostavimo periodični signal, moramo namesto Fourierove transformacije uporabiti Fourierovo vrsto, frekvenčni spekter takšnega signala pa je diskreten, to se pravi, da vsebuje le enosmerno komponento (frekvenco 0), osnovno harmonsko komponento ter njene mnogokratnike (frekvence $0, \pm\frac{1}{T}, \pm\frac{2}{T}, \ldots$ oziroma krožne frekvence $\omega = m\frac{2\pi}{T},\; m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, Koeficient Fourierove vrste je v tem primeru

$$X^p(m\frac{2\pi}{T}) = \frac{1}{T}\int_0^T x^p(t)e^{-\jmath m\frac{2\pi}{T}t}dt = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-\jmath m\frac{2\pi}{T}t}dt \tag{8}$$

S primerjavo izrazov (7) in (8) dobimo

$$X(\omega)|_{\omega=m\frac{2\pi}{T}} = TX^p(m\frac{2\pi}{T}) \tag{9}$$

To enačbo si lahko razlagamo tudi takole: pri neperiodičnem signalu predstavlja $X(\omega)$ gostoto spektra, zato je potrebno spekter $X^p(m\frac{2\pi}{T})$ porazdeliti po celotnem območju med dvema vrednostima vzorčenega frekvenčnega signala, torej deliti s širino prirastka frekvence ($\frac{1}{T}$) oziroma pomnožiti s T.

Fourierovo transformacijo digitalnih (vzorčenih in periodičnih) signalov računamo na digitalnih računalnikih z Diskretno Fourierovo transformacijo oziroma z njeno hitro varianto t.i. Hitro Fourierovo transformacijo (Fast Fourier Transformation - FFT)

$$\begin{aligned} X^d(m) &= \sum_{k=0}^{N-1} x^d(k) e^{-\jmath \frac{2\pi}{N} mk} \\ x^d(k) &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X^d(m) e^{\jmath \frac{2\pi}{N} mk} \end{aligned} \tag{10}$$

Poglejmo sedaj relacijo med Fourierovo transformacijo periodičnega in vzorčenega signala (Fourierovo vrsto) in Diskretno Fourierova transformacijo po definiciji (10)

Koeficient Fourierove vrste vzorčenega signala je

$$\begin{aligned} X^{*p}(m\frac{2\pi}{T}) &= \frac{1}{T} \int_0^T x^p(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-k\lambda) e^{-\jmath m \frac{2\pi}{T} t} dt \\ &= \frac{1}{N\lambda} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^T x(t) \delta(t-k\lambda) e^{-\jmath m \frac{2\pi}{N\lambda} t} dt \end{aligned} \tag{11}$$

Vrednost integrala za $k < 0$ in $k \geq N$ je nič, zato lahko napišemo z upoštevanjem en. (6) in (7)

$$
\begin{aligned}
X^{*p}(m\frac{2\pi}{T}) &= \frac{1}{N\lambda}\sum_{k=0}^{N-1} x(k\lambda)e^{-\jmath\frac{2\pi}{N\lambda}mk\lambda} \\
&= \frac{1}{N\lambda}\sum_{k=0}^{N-1} x^d(k)e^{-\jmath\frac{2\pi}{N}mk} \\
&= \frac{1}{N\lambda}X^d(m) \qquad (12)
\end{aligned}
$$

Naslednja relacija, ki si jo bomo ogledali je relacija med vzorčenimi in nevzorčenimi signali. Znano je, da je frekvenčni spekter vzorčenega signala sestavljen iz frekvenčnega spektra originalnega signala, ki je pomnožen z $1/\lambda$ in iz neskončnega števila njegovih premeščenih verzij

$$
X^*(\omega) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=-\infty}^{\infty} X(\omega - i\frac{2\pi}{\lambda}) \qquad (13)
$$

Zato dobimo pri idealni rekonstrukciji signal $x(t)$ iz vzorčenega signala $x^*(t)$ tako, da slednjega pošljemo skozi idealni nizki filter z ojačanjem λ in pasovno širino $\frac{1}{2\lambda}$. Zato lahko zapišemo

$$
\begin{aligned}
X(\omega) &= G_{\mathrm{ideal}}X^*(\omega) \\
X(\omega) &= \lambda X^*(\omega) \qquad \omega < \frac{2\pi}{2\lambda} = \frac{\pi}{\lambda} \qquad (14)
\end{aligned}
$$

Ista relacija velja seveda tudi za periodične signale

$$\begin{aligned} X^p(m\tfrac{2\pi}{T}) &= G_{\mathrm{ideal}} X^{*p}(\omega) \\ &= \lambda X^{*p}(\omega) && m\tfrac{2\pi}{T} < \tfrac{\pi}{\lambda} \\ &= \lambda \tfrac{1}{N\lambda} X^d(m) && m < \tfrac{N}{2} \\ &= \tfrac{1}{N} X^d(m) && m < \tfrac{N}{2} \end{aligned}$$

kjer sem upošteval en. (12). Ta enačba podaja relacijo med koeficienti Fourierove vrste in Diskretne Fourierove transformacije. Koeficiente Fourierove vrste zveznega periodičnega signala dobimo v praksi torej tako, da posnamemo signal z digitalnim računalnikom in sicer posnamemo celo število period. Pri tem mora biti maksimalna frekvenca signala manjša od polovične frekvence vzorčenja. Nato izračunamo Diskretno Fourierovo transformacijo posnetega signala in dobljene koeficiente delimo z N.

Poglejmo še, kaj je v primeru, če je posneti signal neperiodičen. Glede na en. (9) in (15) lahko zapišemo

$$\begin{aligned} X(\omega)\big|_{\omega = m\frac{2\pi}{T}} &= T X^p(m\frac{2\pi}{T}) \\ &= \lambda X^d(m) && \omega < \frac{\pi}{\lambda} \end{aligned} \tag{15}$$

Gostoto frekvenčnega spektra neperiodičnega signala dobimo torej v praksi tako, da signal posnamemo v celoti z digitalnim računalnikom. Pri tem seveda maksimalna frekvenca signala zopet ne sme biti višja od polovične frekvence vzorčenja. Nato izračunamo Diskretno Fourierovo transformacijo vzorčenega signala in pomnožimo tako dobljene koeficiente z λ. Tako dobljen rezultat pomeni vzorčeno gostoto frekvenčnega spektra originalnega signala.

V praksi seveda za rekonstrukcijo originalnega signala iz vzorčenega signala ne uporabljamo idealnega nizkega filtra, temveč zadrževalnik ničtega reda s prenosno funkcijo

$$G_0(s) = \frac{1 - e^{-s\lambda}}{s} \tag{16}$$

oziroma frekvenčnim odzivom

$$G_0(\jmath\omega) = \lambda \frac{\sin \frac{\omega\lambda}{2}}{\frac{\omega\lambda}{2}} e^{\jmath \frac{\omega\lambda}{2}} \tag{17}$$

Koeficiente Fourierove vrste zveznega periodičnega signala, ki smo ga dobili iz periodičnega diskretnega signala s pomočjo zadrževalnika ničtega reda, dobimo tako po formuli

$$\begin{aligned} X^p(m\frac{2\pi}{T}) &= G_0(\jmath\omega) X^{*p}\left(m\frac{2\pi}{T}\right) \\ &= \lambda \frac{\sin m\frac{2\pi}{T}\frac{\lambda}{2}}{m\frac{2\pi}{T}\frac{\lambda}{2}} X^{*p}\left(m\frac{2\pi}{T}\right) e^{\jmath m\frac{2\pi}{T}\frac{\lambda}{2}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{N\lambda} X^d(m) \lambda \frac{\sin \frac{m\pi}{N}}{\frac{m\pi}{N}} e^{\jmath \frac{m\pi}{N}} \\
&= \frac{1}{N} X^d(m) \frac{\sin \frac{m\pi}{N}}{\frac{m\pi}{N}} e^{\jmath \frac{m\pi}{N}} \qquad (18)
\end{aligned}
$$

Če vzamemo le eno periodo tako dobljenega časovno zveznega signala, dobimo gostoto frekvenčnega spektra takšnega signala glede na en. (9)

$$
\begin{aligned}
X(\omega) \mid_{\omega=m\frac{2\pi}{T}} &= T X^p(m\frac{2\pi}{T}) e^{\jmath \frac{m\pi}{N}} \\
&= \lambda X^d(m) \frac{\sin \frac{m\pi}{N}}{\frac{m\pi}{N}} e^{\jmath \frac{m\pi}{N}} \qquad (19)
\end{aligned}
$$

Tako dobljen rezultat pomeni vzorčeno gostoto frekvenčnega spektra originalnega signala.